

1. 임의의 사상 A, B, C 에 대하여 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ 임을 밝혀라.

2. $A_1, A_2, \dots \subset S$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n$ 이면, $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ 임을 보이라.

3. 확률변수란?

4. 다음 확률분포의 평균과 분산을 구하라.

$$f(x) = \left(2 - 4\left|x - \frac{1}{2}\right|\right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

5. 확률변수 X 의 누적분포함수 $F(x)$ 가 다음과 같다고 하자.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 < x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & , \quad \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ x & , \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq x \end{cases}$$

이때 다음 확률을 구하여라.

1) $P(X \leq \frac{1}{8})$

2) $P(X < \frac{1}{8})$

3) $P(X = \frac{1}{8})$

4) $P(X \leq \frac{1}{4})$

5) $P(X < \frac{1}{4})$

6) $P(X = \frac{1}{4})$

7) $P(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4})$

8) $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$

6. 서로 독립이고 Bernoulli(p)($0 < p < 1$) 분포를 따르는 확률변수들 X_1, \dots, X_N 에 대하여

$$X_1, \dots, X_D | X_1, \dots, X_N = n \sim H(n; N, D) (D \leq N)$$

즉, $X_1, \dots, X_N = n$ 인 조건에서 X_1, \dots, X_D 의 조건부분포가 초기하분포 $H(n; N, D)$ 임을 밝혀라.

7. 포아송과정에서 1번째 발생이 일어날 때까지의 기다리는 시간을 W 라 할 때, 이 때 확률변수 W 가 갖는 확률분포를 구하고, 이 확률분포의 평균, 분산, 적률생성 함수를 유도하라.

8. 다음과 같은 결합확률밀도함수를 가지는 확률변수 X 와 Y 가 있다.

$$f(x, y) = (x+y)/21, \quad x=1,2,3, y=1,2.$$

이때, X 와 Y 의 주변확률밀도함수, 평균, 분산, 공분산, 상관계수 및

$X=1$ 일때 y 의 조건부 평균, 조건부 분산을 제시하라.

9. $f(x) = \frac{x^2}{3}, -1 < x < 2$ 일 때, $Y = X^2$ 확률밀도함수를 구하시오.

10. $f(x_1, x_2) = 2, 0 < x_1 < x_2 < 1$ 일 때, $Y_1 = \frac{x_1}{x_2}, Y_2 = X_2$ 의 결합밀도함수를 구하시오.

11. 확률변수 U, V 가 각각 자유도 r_1, r_2 인 서로 독립인 카이제곱분포를 갖는다고 할 때, $F = \frac{U/r_1}{V/r_2}$ 인 확률밀도함수를 구하시오.

12. \bar{X} 와 S^2 이 평균이 μ 이고, 표준편차가 σ 인 정규 집단으로부터 추출된 크기가 N 인 확률표본의 평균과 분산이며, \bar{X} 와 S^2 이 독립일 때, 확률변수 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 의 분포는 자유도가 $(n-1)$ 인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

13. 확률변수 X 의 평균이 μ 이고, 분산이 σ^2 이라면, 모든 $k \geq 1$ 에 대하여 아래의 식이 성립됨을 보여라.

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

14. 중심극한정리에 대해서 설명하고 적률생성함수 방법을 이용하여

$$W = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$
임을 보여라.

15. X_1, X_2, \dots, X_n 이 확률밀도함수 $f(x|\theta) = \exp(-(x-\theta))$, $x > \theta$ 를 갖는 랜덤표본 일때 θ 의 최대가능도추정량 및 적률추정량을 구하여라.

16. 좋은 추정량에 대해서 논하시오.

17. X_1, X_2, \dots, X_n 이 $N(\mu, \sigma^2)$ 으로 부터의 랜덤표본일 때, $T(X) = (\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i)$ 는 (μ, σ^2) 에 대한 충분통계량임을 보여라.

18. X_1, X_2, \dots, X_n 이 Poisson(θ)로 부터의 랜덤표본일때, θ 의 추정량 $\hat{\theta} = \bar{X}$ 는 비편향추정량 중에서 분산이 가장 작은 추정량임을 보여라.
19. 정규분포 $N(\mu, 25)$ 로부터 크기 16인 확률표본을 관측한 결과 표본평균이 73.8을 얻었다. 이때 μ 에 대한 95% 신뢰구간은?
20. 확률변수 X 는 $N(\mu, 4.84)$ 를 따른다고 할 때 μ 의 최대 오차가 0.4이며 95% 신뢰도를 갖도록 표본의 크기 n 을 구하여라.
21. 코로나 백신 A와 B에 대한 임상시험을 실시하였다. 백신 A에 대하여 99명의 피험자 중 75명이 항체가 생성되었고, 백신 B에 대하여 86명의 피험자 중 80명이 항체가 생성되었다. 이때 두 백신에 대한 항체 생성률 차이에 대한 근사 95% 신뢰구간을 제시하고, 그 결과를 해석하여라.
22. $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ 는 제 $(100p)$ 백분위수 π_p 를 갖는 연속형 분포로부터 나온 순서통계량이다. 이때 다음을 계산하여라.
- 1) $P(Y_2 < \pi_{0.5} < Y_5)$
 - 2) $P(Y_1 < \pi_{0.2} < Y_4)$
 - 3) $P(Y_3 < \pi_{0.9} < Y_5)$

23. $X_1, X_2, \dots, X_{20} \sim \text{Bernoulli}(p)$, $Y = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{BIN}(20, p)$ 이고 $H_0 : p=0.5$, $H_1 : p < 0.5$ 일 때 기각역은 $C = \{ y : y \leq c \}$ 일 때, 검정력 함수 $K(p)$ 를 이용하여, $K(1/2) \approx 0.05$ & $K(1/4) \approx 0.90$ 이 되도록 n 과 c 를 구하라.

24. 이산형 확률변수 X 의 확률질량함수가 다음과 같을 때 X 를 이용하여 다음 가설에 대한 검정을 하려고 한다.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1,$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x \theta_0)$	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05
$f(x \theta_1)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

- 1) 유의수준 0.05에서 최강력검정법을 구하여라.
- 2) 유의수준 0.1에서 최강력검정법을 구하여라.
- 3) 유의수준 0.075에서 최강력검정법을 구하여라.